Решение задачи линейного программирования симплекс методом.  
Нахождение наибольшего значения функции

**Задача:**

Найти наибольшее значение функции

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| F | = |  | 3 | x1 | + | 4 | x2 |

при следующих ограничениях:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Знак системы |  |  | x1 | + |  | x2 | ≤ | 55 |
|  | 2 | x1 | + | 3 | x2 | ≤ | 120 |
|  | 12 | x1 | + | 30 | x2 | ≤ | 960 |

x1 ≥ 0    x2 ≥ 0    

**Решение:**

**1. Свободные члены системы должны быть неотрицательными.**

Данное условие выполнено.

**2. Каждое ограничение системы должно представлять собой уравнение.**

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Знак системы |  |  | x1 | + |  | x2 | ≤ | 55 |
|  | 2 | x1 | + | 3 | x2 | ≤ | 120 |
|  | 12 | x1 | + | 30 | x2 | ≤ | 960 |

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Знак системы |  |  | x1 | + |  | x2 | + |  | S1 |  |  |  |  |  |  | = | 55 |
|  | 2 | x1 | + | 3 | x2 |  |  |  | + |  | S2 |  |  |  | = | 120 |
|  | 12 | x1 | + | 30 | x2 |  |  |  |  |  |  | + |  | S3 | = | 960 |

S1 ≥ 0, S2 ≥ 0, S3 ≥ 0.   Введенные переменные S1, S2, S3, называются балансовыми переменными.

**3. Нахождение начального базиса и значения функции F, которое соответствует найденному начальному базису.**

**Что такое базис?**  
Переменная называется базисной для данного уравнения, если она входит в данное уравнение с **коэффициентом один** и не входит в оставшиеся уравнения системы (при условии, что в правой части уравнения стоит неотрицательное число).  
Если в каждом уравнении присутствует базисная переменная, тогда говорят, что в системе присутствует базис.  
Переменные, которые не являются базисными, называются свободными.  
  
**В чем заключается идея симплекс метода?**  
Каждому базису соответствует единственное значение функции. Одно из них является наибольшим значением функции F.  
Мы будем переходить от одного базиса к другому.  
Следующий базис будем выбирать таким образом, чтобы получить значение функции F не меньше имеющегося.  
Очевидно, количество возможных базисов для любой задачи число не очень большое.  
Следовательно, рано или поздно, ответ будет получен.  
  
**Как осуществляется переход от одного базиса к другому?**  
Запись решения удобнее вести в виде таблиц. Каждая строка таблицы эквивалентна уравнению системы. Выделенная строка состоит из коэффициентов функции (см. таблицу ниже). Это позволяет не переписывать переменные каждый раз, что существенно экономит время.  
B выделенной строке выбираем наибольший положительный коэффициент (можно выбрать любой положительный).  
Это необходимо для того, чтобы получить значение функции F не меньше имеющегося.  
Выбран столбец.  
Для положительных коэффициентов выбранного столбца считаем отношение Θ и выбираем наименьшее значение.  
Это необходимо для того, чтобы после преобразования столбец свободных членов остался неотрицательным.  
Выбрана строка.  
Определен элемент, который будет базисным. Далее считаем.  
  
**В нашей системе есть базис?**

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Знак системы |  |  | x1 | + |  | x2 | + |  | S1 |  |  |  |  |  |  | = | 55 |
|  | 2 | x1 | + | 3 | x2 |  |  |  | + |  | S2 |  |  |  | = | 120 |
|  | 12 | x1 | + | 30 | x2 |  |  |  |  |  |  | + |  | S3 | = | 960 |

Базис есть, т.е. мы можем начать решение.

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| F | = |  | 3 | x1 | + | 4 | x2 |

Приравниваем свободные переменные нулю. Устно находим значения базисных переменных. (см. систему)  
Функция F выражена через свободные переменные. Поэтому значение функции F, для данного базиса, можно найти мгновенно.

|  |  |
| --- | --- |
| x1 = 0   x2 = 0   S1 = 55   S2 = 120   S3 = 960 | => F = 0 |

Начальный базис найден и получено значение функции F, соответствующее найденному базису.

**4. Нахождение наибольшего значения функции F.**

Шаг №1

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| x1 | x2 | S1 | S2 | S3 | св. член | Θ |
| 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 55 | 55 : 1 = 55 |
| 2 | 3 | 0 | 1 | 0 | 120 | 120 : 2 = 60 |
| 12 | 30 | 0 | 0 | 1 | 960 | 960 : 12 = 80 |
| 3 | 4 | 0 | 0 | 0 | F - 0 |  |
| 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 55 |  |
| 0 | 1 | -2 | 1 | 0 | 10 |  |
| 0 | 18 | -12 | 0 | 1 | 300 |  |
| 0 | 1 | -3 | 0 | 0 | F - 165 |  |

Приравниваем свободные переменные нулю. Устно находим значения базисных переменных. (см. таблицу)  
Функция F выражена через свободные переменные. Поэтому значение функции F, для данного базиса, можно найти мгновенно. (см. выделенную строку таблицы)

|  |  |
| --- | --- |
| x2 = 0   S1 = 0   x1 = 55   S2 = 10   S3 = 300 | => F - 165 = 0   => F = 165 |

Шаг №2

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| x1 | x2 | S1 | S2 | S3 | св. член | Θ |
| 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 55 | 55 : 1 = 55 |
| 0 | 1 | -2 | 1 | 0 | 10 | 10 : 1 = 10 |
| 0 | 18 | -12 | 0 | 1 | 300 | 300 : 18 ≈ 16,67 |
| 0 | 1 | -3 | 0 | 0 | F - 165 |  |
| 1 | 0 | 3 | -1 | 0 | 45 |  |
| 0 | 1 | -2 | 1 | 0 | 10 |  |
| 0 | 0 | 24 | -18 | 1 | 120 |  |
| 0 | 0 | -1 | -1 | 0 | F - 175 |  |

Приравниваем свободные переменные нулю. Устно находим значения базисных переменных. (см. таблицу)  
Функция F выражена через свободные переменные. Поэтому значение функции F, для данного базиса, можно найти мгновенно. (см. выделенную строку таблицы)

|  |  |
| --- | --- |
| S1 = 0   S2 = 0   x1 = 45   x2 = 10   S3 = 120 | => F - 175 = 0   => F = 175 |

Среди коэффициентов выделенной строки нет положительных. Следовательно, найдено наибольшее значение функции F.

**Ответ:**

x1 = 45   x2 = 10

Fmax = 175